第 24 講　平面ベクトルで垂直といえば…

24　三角形 OAB に対して次の各問いに答えよ.

(1)　点 A から直線 OB に下ろした垂線の足を H とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ.

(2)　直線 OB に関する点 A の対称点を C とする. $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ.

(3)　(2)の点 C を直線 OA に関して対称移動した点を D とする. $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ.

(4)　OP が三角形 OAB の外接円の直径であるとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　平面ベクトルで垂直といえば…

24　三角形ABCにおいて，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ とおき，さらに $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を $\vec{b}\cdot\vec{c}=m$，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ の大きさをそれぞれ $|\vec{b}|=b$，$|\vec{c}|=c$ とおく．

(1)　直線ABに関して，点Cと対称な点をDとするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ をベクトル $\vec{b}$，$\vec{c}$ と実数 m，b，c を用いて表せ．

(2)　直線ACに関して，点Bと対称な点をEとするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ をベクトル $\vec{b}$，$\vec{c}$ と実数 m，b，c を用いて表せ．

(3)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が平行なとき，三角形ABCはどのような三角形か．

【選択肢】

(1)　㋐　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2m}{b^2}\vec{b}+\vec{c}$　　㋑　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{m}{b^2}\vec{b}-\vec{c}$　　㋒　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{2m}{b^2}\vec{b}-\vec{c}$

(2)　㋐　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-\left(\dfrac{2m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{2m}{c^2}+1\right)\vec{c}$　　㋑　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=\left(\dfrac{2m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{2m}{c^2}+1\right)\vec{c}$

㋒　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-\left(\dfrac{m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{m}{c^2}+1\right)\vec{c}$

(3)　㋐　AB＝ACの二等辺三角形（$\angle$A$\neq 120^\circ$）　　㋑　$\angle$A＝90°の直角三角形

㋒　$\angle$A＝90°の直角三角形またはAB＝ACの二等辺三角形（$\angle$A$\neq 120^\circ$）

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 24 講　平面ベクトルで垂直といえば…

24　三角形 OAB に対して次の各問いに答えよ.

(1)　点 A から直線 OB に下ろした垂線の足を H とするとき, $\overrightarrow{OH}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ.

(2)　直線 OB に関する点 A の対称点を C とする. $\overrightarrow{OC}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ.

(3)　(2)の点 C を直線 OA に関して対称移動した点を D とする. $\overrightarrow{OD}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ.

(4)　OP が三角形 OAB の外接円の直径であるとき, $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ で表せ.

【答】 (1) $\overrightarrow{OH}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}$　(2) $\overrightarrow{OC}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

(3) $\overrightarrow{OD}=\left\{\dfrac{4(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2}-1\right\}\overrightarrow{OA}-\dfrac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}$

(4) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{|\overrightarrow{OB}|^2(|\overrightarrow{OA}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{|\overrightarrow{OA}|^2(|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}\overrightarrow{OB}$

【解答】

(1)　H は直線 OB 上の点より $\overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{OB}$ (t は実数) と表せ, AH⊥OB より

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OB}&=(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}\\&=(t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{OB}\\&=t|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0\end{aligned}$$

よって

$$t=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}$$

ゆえに

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OH}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}}$$

(2)　H は線分 AC の中点より

$$\overrightarrow{OH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$$

ゆえに

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC}&=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}\\&=\boldsymbol{\frac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}}\end{aligned}$$

(3)　直線 OB に関する点 A の対称点が C のとき　$\overrightarrow{OC}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$　となるので,

直線 OA に関する点 C の対称点が D のときにも同様に　$\overrightarrow{OD}=\dfrac{2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$　を

得る.

ⓒRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\left(\frac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)\cdot\overrightarrow{OA}$$
$$=\frac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OA}|^2$$
$$=\frac{2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}{|\overrightarrow{OB}|^2}-|\overrightarrow{OA}|^2$$

より

$$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{|\overrightarrow{OA}|^2}\left\{\frac{2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}{|\overrightarrow{OB}|^2}-|\overrightarrow{OA}|^2\right\}\overrightarrow{OA}-\left(\frac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)$$
$$=\boldsymbol{\left\{\frac{4(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2}-1\right\}\overrightarrow{OA}-\frac{2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}}$$

(4)　$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$ (α, β は実数) と表せる．

$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{AP}$ より

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\overrightarrow{OA}\cdot(\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$$
$$=\alpha|\overrightarrow{OA}|^2+\beta\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-|\overrightarrow{OA}|^2=0$$

また $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{BP}$ より同様に

$$\alpha\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\beta|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=0$$

を得るので，これら 2 式より

$$\alpha=\frac{|\overrightarrow{OB}|^2(|\overrightarrow{OA}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2},\qquad \beta=\frac{|\overrightarrow{OA}|^2(|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

よって

$$\boldsymbol{\overrightarrow{OP}=\frac{|\overrightarrow{OB}|^2(|\overrightarrow{OA}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}\overrightarrow{OA}+\frac{|\overrightarrow{OA}|^2(|\overrightarrow{OB}|^2-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})}{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}\overrightarrow{OB}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　平面ベクトルで垂直といえば…

24　三角形ABCにおいて，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とおき，さらに $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の内積を $\vec{b}\cdot\vec{c}=m$，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ の大きさをそれぞれ $|\vec{b}|=b$，$|\vec{c}|=c$ とおく．

(1)　直線ABに関して，点Cと対称な点をDとするとき，ベクトル $\overrightarrow{AD}$ をベクトル $\vec{b}$，$\vec{c}$ と実数 m，b，c を用いて表せ．

(2)　直線ACに関して，点Bと対称な点をEとするとき，ベクトル $\overrightarrow{DE}$ をベクトル $\vec{b}$，$\vec{c}$ と実数 m，b，c を用いて表せ．

(3)　ベクトル $\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{BC}$ が平行なとき，三角形ABCはどのような三角形か．

【選択肢】

(1)　㋐　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2m}{b^2}\vec{b}+\vec{c}$　㋑　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{m}{b^2}\vec{b}-\vec{c}$　㋒　$\overrightarrow{AD}=\dfrac{2m}{b^2}\vec{b}-\vec{c}$

(2)　㋐　$\overrightarrow{DE}=-\left(\dfrac{2m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{2m}{c^2}+1\right)\vec{c}$　㋑　$\overrightarrow{DE}=\left(\dfrac{2m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{2m}{c^2}+1\right)\vec{c}$

㋒　$\overrightarrow{DE}=-\left(\dfrac{m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\dfrac{m}{c^2}+1\right)\vec{c}$

(3)　㋐　AB＝ACの二等辺三角形（$\angle A\neq 120°$）　㋑　$\angle A=90°$ の直角三角形

㋒　$\angle A=90°$ の直角三角形またはAB＝ACの二等辺三角形（$\angle A\neq 120°$）

【答】　(1)　㋒　(2)　㋐　(3)　㋒

【解答】

(1)　点Cから直線ABに下ろした垂線の足をHとすると

$$\overrightarrow{AH}=k\vec{b}\quad (k\text{ は実数})$$

とおけ，AB⊥CHより

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CH}=0$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC})=0$$
$$\vec{b}\cdot(k\vec{b}-\vec{c})=0$$
$$k=\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}$$

ゆえに　$\overrightarrow{AH}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\dfrac{m}{b^2}\vec{b}$　と表せる．

ここでHは線分CDの中点より

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$$
$$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC}$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\overrightarrow{AD}=\frac{2m}{b^2}\vec{b}-\vec{c}}$$

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　対称性より，(1)の結果を利用して

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{2m}{c^2}\vec{c}-\vec{b}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}}&=\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\left(\frac{2m}{c^2}\vec{c}-\vec{b}\right)-\left(\frac{2m}{b^2}\vec{b}-\vec{c}\right)\\&=\boldsymbol{-\left(\frac{2m}{b^2}+1\right)\vec{b}+\left(\frac{2m}{c^2}+1\right)\vec{c}}\end{aligned}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\mathbin{/\!/}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=k\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ となる実数 $k(\neq 0)$ が存在する．

$$\begin{aligned}k\overrightarrow{\mathrm{BC}}&=k(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})\\&=-k\vec{b}+k\vec{c}\end{aligned}$$

となり，これと(2)の結果より

$$-k=-\left(1+\frac{2m}{b^2}\right)\quad \text{かつ}\quad k=1+\frac{2m}{c^2}$$

ゆえに

$$1+\frac{2m}{b^2}=1+\frac{2m}{c^2}$$

$$\frac{2m}{b^2}=\frac{2m}{c^2}$$

$$\frac{2m(b+c)(b-c)}{b^2c^2}=0$$

$$\therefore\quad m=0 \text{ または } b=c\qquad (b>0,\ c>0 \text{ より})$$

ここで，$b=c$ の場合は　$k=1+\dfrac{2m}{b^2}=1+\dfrac{2\vec{b}\cdot\vec{c}}{b^2}=1+2\cos A$　となるが，

$k\neq 0$ より $\cos A\neq -\dfrac{1}{2}$，すなわち $b=c$ の場合は $\angle\mathrm{A}\neq 120^\circ$ である．

よって三角形 ABC は，

$\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角三角形または AB＝AC の二等辺三角形（$\angle\mathrm{A}\neq 120^\circ$）.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。